Solut: CSC 104 - final 2018

Ex 1

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & -3 \\ -4 & -1 & -12 & 9 \\ -2 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

1) d'abord A est décomposable en LU car:

$|\Delta_1| = |-2| = -2 \neq 0$

$|\Delta_2| = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$

$|\Delta_3| = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \\ -4 & -1 & -12 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$

$|\Delta_4| = |A| = -6 \neq 0.$

Et1: $L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $A_1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & -3 & -10 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

Et2 $L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $A_2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \end{pmatrix}$

Et3: $L_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$; $A_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

$L = L_1 L_2 L_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $U = A_3$.

2) $Ax = b$, $b = {}^t(1.5, 4, -14, -6.5)$ (2)

Soit $Ux = \tilde{x}$; $Ax = b$ ssi $LUx = b$ donc $L\tilde{x} = b$

$$\begin{cases} \tilde{x}_1 = 1.5 \\ -\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 = 4 \\ 2\tilde{x}_1 - 3\tilde{x}_2 = -14 \\ \tilde{x}_1 - 2\tilde{x}_3 + \tilde{x}_4 = -6.5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tilde{x}_1 = 1.5 \\ \tilde{x}_2 = 5.5 \\ \tilde{x}_3 = -0.5 \\ \tilde{x}_4 = -9 \end{cases}$$

$Ux = \tilde{x}$ donne
$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1.5 \\ x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 5.5 \\ -x_3 + x_4 = -0.5 \\ -3x_4 = -9 \end{cases}$$

on obtient $X = \begin{pmatrix} -0.5 \\ 1 \\ 3.5 \\ 3 \end{pmatrix}$;

3) $B = {}^tU(LU)^tL = ({}^tU \cdot L)(U\,{}^tL)$

U triang sup donc ${}^tU$ triang inf, L triang inf donc ${}^tU \cdot L$ est triang inf ; L triang inf donc ${}^tL$ est triang sup donc $(U\,{}^tL)$ est triang. sup

On a $B = L'U'$ avec $L' = {}^tUL$ triang inf

$U' = U\,{}^tL$ triang sup

Ex2 : 1) $x^{k+1} = x^k + \alpha(b - Ax^k)$

$x^{k+1} = (I - \alpha A)x^k + \alpha b$

$B = I - \alpha A$

2) Cette méthode cvge $\forall x^{(0)}$ ssi $\rho(B) < 1$

$v.p(B) = 1 - \alpha \cdot v.p(A)$

Si λ v.p de A alors $1 - \alpha\lambda$ est une v.p. de B.

$$\rho(B) = \max_{\lambda \in Sp(A)} |1 - \alpha\lambda|$$

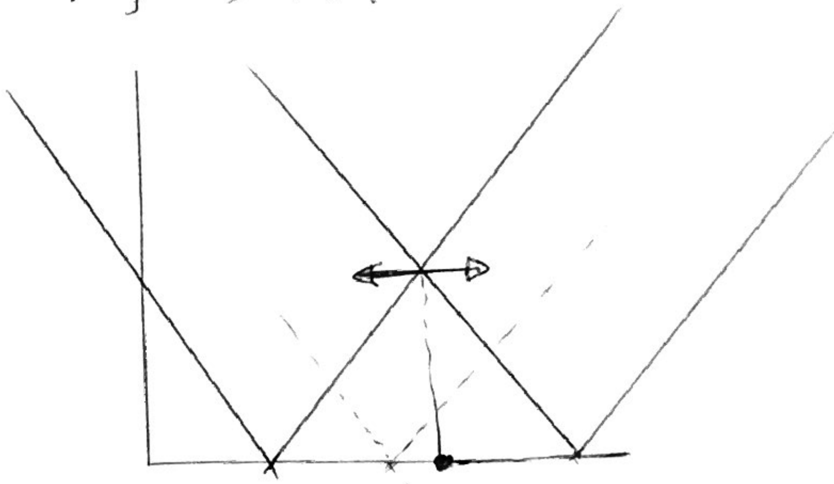
Soit $\varphi_\lambda(\alpha) = |1 - \alpha\lambda|$, $\lambda_1 \le \lambda \le \lambda_n$, $\alpha \in \mathbb{R}$

on a n graphes de la façon suite :

$$\rho(B) = \max_{\lambda_1 \le \lambda \le \lambda_n} \varphi_\lambda(\alpha)$$

correspond à α tq

$\varphi_{\lambda_1}(\alpha) = \varphi_{\lambda_2}(\alpha)$



$|1 - \alpha\lambda_1| = |1 - \alpha\lambda_2|$

$1 - \alpha\lambda_1 = -(1 - \alpha\lambda_2)$ donc $\alpha = \dfrac{2}{\lambda_1 + \lambda_n}$.

Ds ce cas $\rho(B) = \max \varphi_\lambda\left(\dfrac{2}{\lambda_1 + \lambda_n}\right)$

$$\rho(B) = \max_{d_1 \le d \le d_n} \left| 1 - \frac{2}{d_1 + d_n} d \right|$$

$$= \max_{d_1 \le d \le d_n} \left| \frac{d_1 + d_n - 2d}{d_1 + d_n} \right|$$

$$\max_{d_1 \le d \le d_n} (|d_1 + d_n - 2d|) = |d_1 + d_n - 2d_1|$$

ou $|d_1 + d_n - 2d_n|$

et ds les 2 cas il est $|d_1 - d_n| = d_n - d_1$

$$\rho(B) = \frac{d_n - d_1}{d_n + d_1} < 1$$

et la méthode Cvge

3) On sait que $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A \cdot {}^tA)}$; A étant sym ${}^tA = A$

$\|A\|_2^2 = \rho(A^2)$

or $\rho(A^2) = (\rho(A))^2$

en effet, comme A est sym alors A est diagonalisable

$A = P^{-1} D P$, avec D diagonale

$A^2 = P^{-1} D^2 P$

les v.p de A sont les élts de D

les v.p de A^2 sont les élts de D^2

donc $v.p(A^2) = (v.p(A))^2$

ainsi $\rho(A^2) = (\rho(A))^2$ et $\|A\|_2 = \rho(A)$. (5)

$Cond(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 = \rho(A) \cdot \rho(A^{-1})$

les v.p de A^{-1} sont $\frac{1}{\lambda}$, $\lambda \in Sp(A)$.

$$\rho(A^{-1}) = \max_{\lambda \in Sp(A)} \left|\frac{1}{\lambda}\right| = \frac{1}{\underset{\lambda \text{ v.p de } A}{\min} |\lambda|} = \frac{1}{\lambda_1}$$

$Cond(A) = \lambda_n \cdot \frac{1}{\lambda_1} = \frac{\lambda_n}{\lambda_1}$ (les v.p. de A sont strictement positives)

4) $x^{k+1} = B x^k + \alpha b$

$$\begin{aligned}
e^{k+1} &= x^{k+1} - \bar{x} \\
&= B x^k + \alpha b - \cancel{\bar{x}} \\
&= B x^k + \alpha A\bar{x} - \bar{x} \\
&= B x^k + (\alpha A - I)\bar{x} \\
&= B x^k - B\bar{x} \\
&= B(x^k - \bar{x}) = B e^k.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|e^{k+1}\|_2 &\leq \|B\|_2 \|e^k\| \\
&\leq \rho(B) \|e^k\|_2 \\
&\leq \frac{\lambda_n - \lambda_1}{\lambda_n + \lambda_1} \|e^k\|.
\end{aligned}$$

$$\|e^{k+1}\|_2 \leq \frac{d_1\left(\frac{d_n}{d_1}-1\right)}{d_1\left(\frac{d_n}{d_1}+1\right)} \|e^k\|_2$$

$$\leq \frac{\mathrm{Cond}(A)-1}{\mathrm{Cond}(A)+1} \|e^k\|_2.$$

Une matrice est dite bien conditionnée si

$$\mathrm{Cond}(A) \longrightarrow 1.$$

dans le cas l'erreur $\longrightarrow 0$.

5) $f(x,y) = \frac{1}{2} {}^t x A x - {}^t b x \qquad x_0 = (2,1)$

$$= 4x^2 - 4xy + 2y^2$$

$\nabla f(x,y) = (8x - 4y, -4x + 4y)$; $\nabla f(2,1) = (12, -4)$

$x^1 = x^0 - \rho \nabla f(x^0) = (2 - 12\rho, 1 + 4\rho)$

$f(x^1) = 800\rho^2 - 160\rho + 10$, son min correspond

à $\rho = 0.1$

$x^1 = (2 - 1.2, 1 + 0.4) = (0.8, 1.4)$.

$\nabla f(x^1) = (0.8, 2.4)$

$x^2 = x^1 - \rho \nabla f(x^1) = (0.8 - 0.8\rho, 1.4 - 2.4\rho)$

$f(\cdot, \cdot) = 4(0.6 - 1.3\rho + 0.6\rho^2)$

$-4(1.1 - 1.9\rho - 1.1\rho + 1.9\rho^2)$

$+2(2 - 6.7\rho + 5.8\rho^2)$

$= 6.3 - 6.6\rho + 6.4\rho^2$

Son min est atteint pour $\rho = 0.5$.

$x^2 = (0.4, 0.2)$.

Ex3.

1) Si $x_k \to \bar{x}$ alors $(I - \alpha D^{-1}A)x_k \to (I - \alpha D^{-1}A)\bar{x}$

$\lim x_{k+1} = \lim [(I - \alpha D^{-1}A)x_k + \alpha D^{-1}b]$

$\bar{x} = (I - \alpha D^{-1}A)\bar{x} + \alpha D^{-1}b$

$\bar{x} = \bar{x} - \alpha D^{-1}A\bar{x} + \alpha D^{-1}b$.

$\alpha D^{-1}A\bar{x} = \alpha D^{-1}b$

$A\bar{x} = b \quad (\alpha \neq 0)$

$\bar{x}$ est la solut. du système $Ax = b$

2) $M = I - \alpha D^{-1}A$;

$$M_{ij} = \begin{cases} 1 - \alpha & \text{si } i = j \\ -\alpha \dfrac{A_{ij}}{A_{ii}} & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

(8)

$$\|M\|_\infty = \max_{x \neq 0} \frac{\|Mx\|_\infty}{\|x\|_\infty}$$

or $(Mx)_i = \sum_{j=1}^{n} M_{ij} x_j = -\frac{\alpha}{A_{ii}} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} A_{ij} x_j + (1-\alpha) x_i$

or $\alpha > 0$, $1-\alpha \geq 0$ et $|x_j| \leq \|x\|_\infty \ \forall j$

donc $\|(Mx)_i\| \leq \|x\|_\infty \left(\frac{\alpha}{|A_{ii}|} \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |A_{ij}| + (1-\alpha) \right)$

or $|A_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |A_{ij}|$ donc

$$\|M\|_\infty < \alpha + (1-\alpha) = 1$$

4) $\|M\|_\infty < 1 \Rightarrow \rho(M) < 1$ et la méthode cvge

5) $\alpha = 1$, $D x_{k+1} = (D - \alpha A) x_k + \alpha b$

$A = D - E - F$, $\alpha = 1$ on obtient

$D x_{k+1} = (E + F) x_k + b$.

C'est la méthode de Jacobi